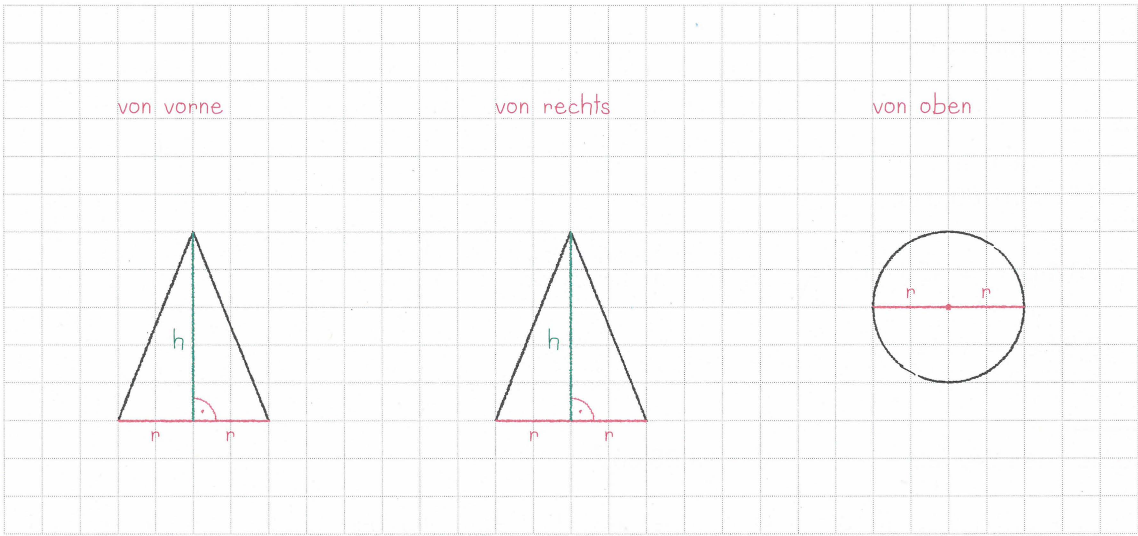
1.1 **a, b** F – B flachster Kegel
D – A mittlerer Kegel
C – E höchster Kegel

c Kegel aus B und F: $S = \pi \cdot 1.75^2 + \frac{7}{8} \cdot \pi \cdot 2^2 = 20.616...$, also $S \approx 20.6\ \text{cm}^2$

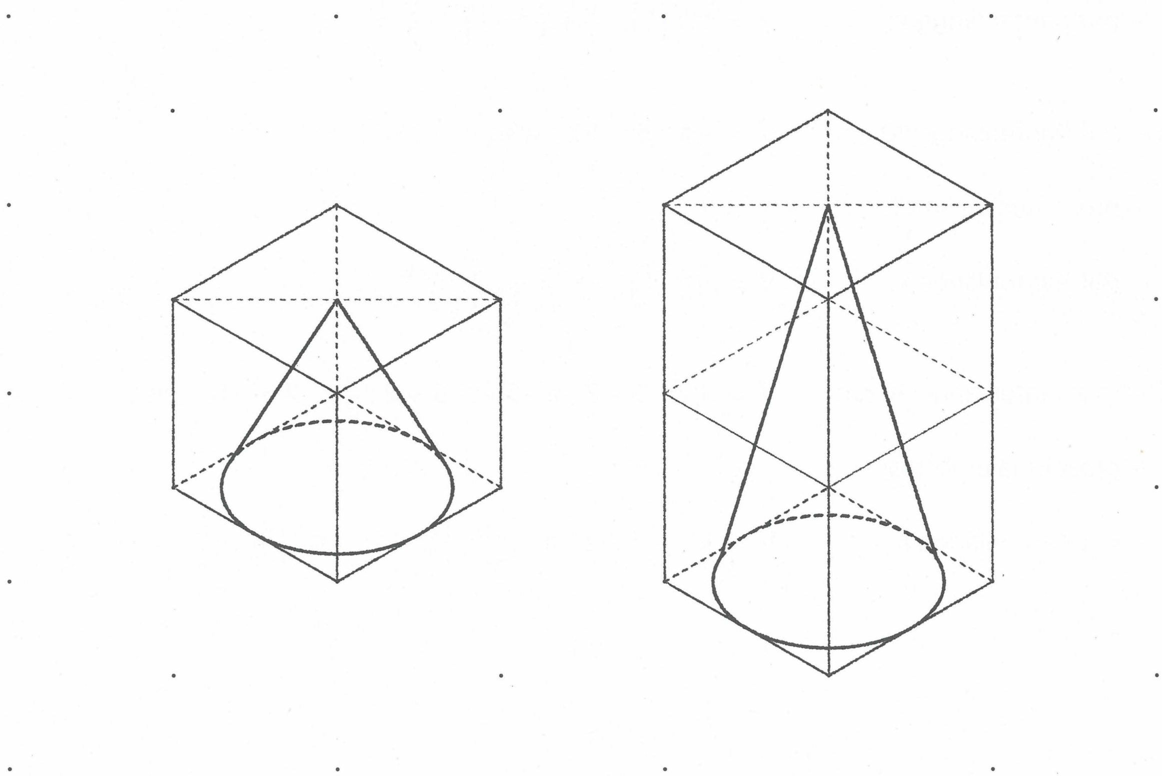
Kegel aus A und D: $S = \pi \cdot 1.5^2 + \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = 16.493...$, also $S \approx 16.5\ \text{cm}^2$

Kegel aus E und C: $S = \pi \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 9.424...$, also $S \approx 9.4\ \text{cm}^2$

1.2 **a** *Mögliche Lösung:*



b *Mögliche Lösungen:*



1.3

	r	h	m	V
a	2 cm	9 cm	~9.2 cm	~37.7 cm^3
b	3.6 m	7.7 m	8.5 m	~104.5 m^3
c	45 cm	60 cm	75 cm	127 234 cm^3
d	37 cm	~31.9 cm	~48.8 cm	45 720 cm^3
e	~5.4 dm	5 dm	~7.3 dm	150 dm^3

Kegelvolumen

1.4 – $V \approx 160.6\ cm^3$
80% von $160.6\ cm^3 \approx 128.4\ cm^3$

– $128.4\ cm^3 = 128.4\ ml = 12.84\ cl$

– $12.84\ cl = 1.284\ dl$

1.5 Volumen des Würfels: $V = 1000\ cm^3$

a – mit Kantenlänge 10 cm: $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 + \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3$, also $V \approx 523.6\ cm^3$

– prozentualer Anteil: ~52.4%

– mit Kantenlänge k: $V = \pi \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot \frac{k}{2} + \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot \frac{k}{2} = \frac{\pi}{6}k^3$

b – mit Kantenlänge 10 cm: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 10$, also $V \approx 261.8\ cm^3$

– prozentualer Anteil: ~6.2%

– mit Kantenlänge k: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot k = \frac{\pi}{12}k^3$

c – mit Kantenlänge 10 cm: $V = 10^2 \cdot 5 + 2 \cdot \pi \cdot 2.5^2 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 2.5^2 \cdot 5$, also $V \approx 761.8\ cm^3$

– prozentualer Anteil: ~76.2%

– mit Kantenlänge k: $V = k^2 \cdot \left(\frac{k}{2}\right) + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{k}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{k}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{k}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{k}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{12}\right)k^3$

d – mit Kantenlänge 10 cm: Pyramidengrundseite: $\frac{10}{\sqrt{2}}$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 5, \quad \text{also } V \approx 214.2\ \text{cm}^3$$

– prozentualer Anteil: ~21.4%

– mit Kantenlänge k: Pyramidengrundseite: $\frac{k}{\sqrt{2}}$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot \frac{k}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{k}{2} = \left(\frac{\pi}{24} + \frac{1}{12}\right)k^3$$

1.6 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 1.5^2 \cdot 4 + \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 8 = 57.424...$

Das Volumen beträgt ungefähr 57.4 m^3.

1.7 Siehe Lösung unter «Extras»

Der veränderliche Kegel

1.8 Siehe Lösung unter «Extras»

Sektglasfüllung

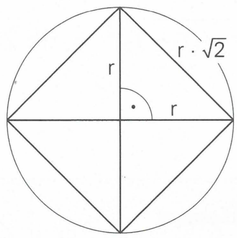
1.9 **a** –

b Kegelvolumen: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Pyramide ①: Seitenlänge: $r \cdot \sqrt{2}$

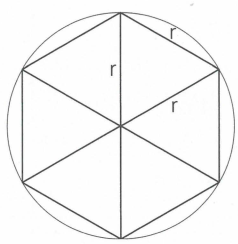
$$V = \frac{1}{3} \cdot (r \cdot \sqrt{2})^2 \cdot h = \frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

Anteil in Prozent: $\frac{\frac{2}{3} \cdot r^2 \cdot h}{\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h} = \frac{2}{\pi} \approx 64\%$



Pyramide ②: $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \left(\frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \cdot h$

Anteil in Prozent: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r^2 \cdot h}{\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 83\%$



c –

1.10 *Zum Tüfteln:*

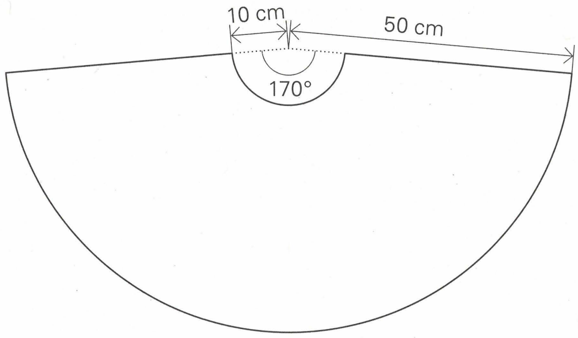
a *Mögliche Begründung:*
In Gedanken halbiert man den Zylinder. In jeder Hälfte befindet sich einer der beiden Kegel. Das Volumen jedes Kegels beträgt ein Drittel des Volumens des Teilzylinders. Daher beträgt das Volumen der beiden Kegel insgesamt ein Drittel des Volumens des gesamten Zylinders.

Es bleiben $66\frac{2}{3}\%$ des Zylinders übrig.

b Für einen Zylinder mit Radius r und Höhe h:

Restkörper: $V = \pi r^2 h - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi r^2 h}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi r^2 h$

1.11 **a, b** *Mögliche Skizze:*



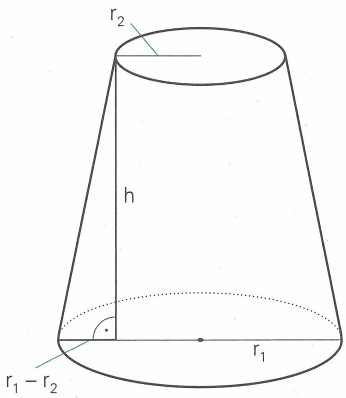
c $A = (\pi \cdot 50^2 - \pi \cdot 10^2) \cdot \frac{170}{360} = 3560.471\ldots$, also $A \approx 3560\ cm^2 = 35.6\ dm^2 = 0.35\ m^2$

d *Zum Tüfteln:*

$$r_1 = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot \frac{170}{360}}{2\pi} = 23.6111\ldots\ cm$$

$$r_2 = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot \frac{170}{360}}{2\pi} = 4.7222\ldots\ cm$$

$$h = \sqrt{40^2 - (r_1 - r_2)^2} = 35.259\ldots,$$ also $h \approx 35.3\ cm$



2.1

	Radius r	Durchmesser d	Volumen V
a	7 cm	14 cm	~1437 cm^3
b	4 m	8 m	~268 m^3
c	4.2 dm	8.4 dm	~310.3 dm^3
d	60 mm	120 mm	~904 778 mm^3
e	~6.2 cm	~12.4 cm	1000 cm^3
f	~2.3 m	~4.7 m	54 m^3

Kugelvolumen

2.2 **a –**

b Volumen Zylinder: $V = \pi \cdot 3.175^2 \cdot (4 \cdot 6.35)$

Volumen Bälle: $V = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3.175^3$

Anteil in Prozent: $\frac{4 \cdot 3.175}{3 \cdot 6.35} = \frac{2}{3} \approx 66.7\%$

Hinweis:
Eine Kugel füllt zwei Drittel des umgebenden Zylinders aus.
Also füllen auch die vier Tennisbälle zwei Drittel des umgebenden Zylinders aus.

c –

2.3 **a –**

b Volumen der halbkugelförmigen Schale: $2\,l = 2\,dm^3$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2\pi r^3}{3}$

$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} = 0.9847\ldots$

$r \approx 0.985\ dm$

$d \approx 1.97\ dm = 19.7\ cm$

2.4 **a –**

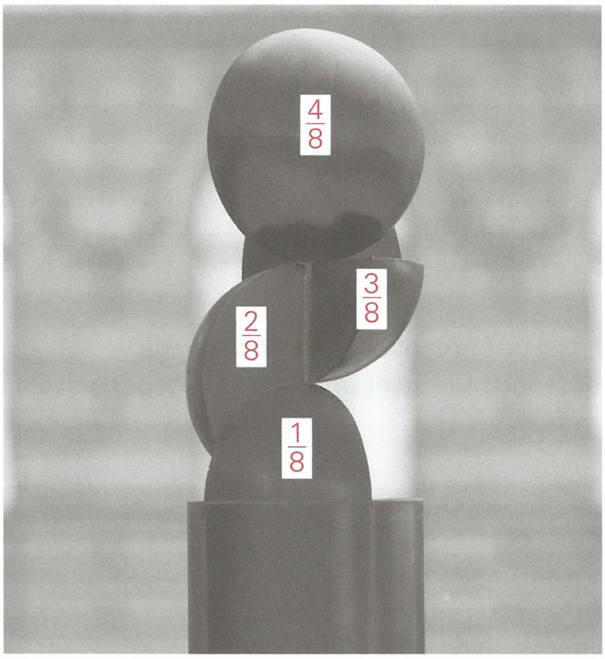
b Radius der Schale: r

Volumen der Schale: $V_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2\pi r^3}{3}$

Volumen der Kugel: $V_K = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^3 = \frac{\pi r^3}{6}$

Anteil in Prozent: $V_K : V_S = \frac{\pi r^3}{6} : \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{1}{4} = 25\%$

2.5 **a**



b Kugelradius: r

Höhe der Skulptur: $h = 4r = 2.5$ m, also $r = 0.625$ m

Anzahl Kugelachtel: $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{10}{8}$

Volumen der Skulptur: $V = \frac{10}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{10}{6}\pi \cdot 0.625^3 = 1.2783173\ldots$, also $V \approx 1.3$ m^3

Gewicht der Skulptur: $G = 1278.317\ldots \cdot 1.38 = 1764.077\ldots$, also $G \approx 1764$ kg

2.6 **a** –

b Anordnung A Kugelradius: $r = \frac{s}{2}$

Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^3 = \frac{\pi \cdot s^3}{6}$

Anteil in Prozent: $\frac{\pi \cdot s^3}{6} : s^3 = \frac{\pi}{6} \approx 52.4\%$

Anordnung B Kugelradius: $r = \frac{s}{4}$

Kugelvolumen: $V = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{s}{4}\right)^3 = \frac{\pi \cdot s^3}{6}$

Anteil in Prozent: $\frac{\pi \cdot s^3}{6} : s^3 = \frac{\pi}{6} \approx 52.4\%$

Anordnung C Kugelradius: $r = \frac{s}{6}$

Kugelvolumen: $V = 27 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{s}{6}\right)^3 = \frac{\pi \cdot s^3}{6}$

Anteil in Prozent: $\frac{\pi \cdot s^3}{6} : s^3 = \frac{\pi}{6} \approx 52.4\%$

c –

d *Zum Tüfteln:*
Anordnung D enthält $4^3 = 64$ Kugeln mit Radien $r = \frac{s}{8}$.

Anordnung E enthält $5^3 = 125$ Kugeln mit Radien $r = \frac{s}{10}$.

Anordnung F enthält $6^3 = 216$ Kugeln mit Radien $r = \frac{s}{12}$.

Es ergibt sich bei jeder Anordnung derselbe prozentuale Anteil von ungefähr 52.4%.

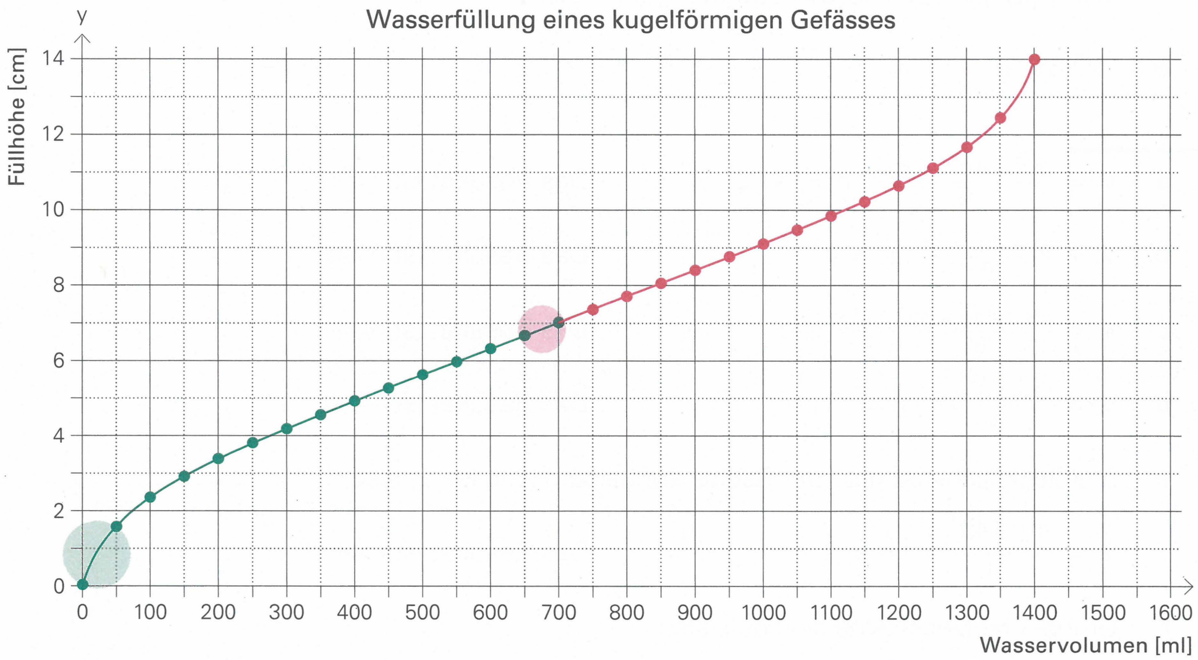
Mögliche Begründung:
Für n Kugeln nebeneinander beträgt das Volumen:

$V = n^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{s}{2n}\right)^3 = \frac{\pi}{6} \cdot s^3$, unabhängig davon, welche natürliche Zahl für n eingesetzt wird.

2.7 *Hinweis:*
Beim abgebildeten kugelförmigen Gefäss wurde der oberste Teil abgeschnitten, damit Wasser eingefüllt werden kann. Die folgenden Lösungen gehen jedoch von einer vollständigen Kugel aus.

a Wie hoch steht das Wasser bei halber Gefässhöhe? 7 cm
Wie hoch wird das Wasser stehen, wenn die ganze Kugel gefüllt ist? 14 cm
Wie viel Wasser ist bei halber Höhe eingefüllt? 700 ml = 0.7 l
Welches Volumen enthält die ganze Kugel? 1400 ml = 1.4 l

b Stärkste Steigung der Füllhöhe: von 0 ml auf 50 ml (erster Einfüllschritt)
Schwächste Zunahme der Füllhöhe: von 650 ml auf 700 ml (letzter Einfüllschritt)



Mögliche Begründungen:
– Die stärkste Zunahme (grün markiert) erfolgt dort, wo das Gefäss am «schmalsten» ist.
– Die schwächste Zunahme (rot markiert) erfolgt dort, wo das Gefäss am «breitesten» ist.

c Fortsetzung des Graphen siehe Diagramm Seite 107.

Mögliche Antworten:
- Bei x = 1400 ml ist das Gefäss vollständig gefüllt.
- Der Graph ist punktsymmetrisch bezüglich des Punktes (700 ml/7 cm).

d Siehe Lösung unter «Extras»

Kugelgefäss

2.8 **a** $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{4}{3} r = \frac{10}{9}\pi r^3$

b $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \cdot \frac{3}{2} r = \frac{13}{6}\pi r^3$

c $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{r}{2} = \frac{13}{24}\pi r^3$

d $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{r}{2} = \frac{15}{24}\pi r^3$

2.9 *Zum Tüfteln:*

a –

b Raumdiagonale im Würfel: $2r$ Würfelkante: $\frac{2r}{\sqrt{3}}$

Würfelvolumen: $V_W = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} r^3$ Kugelvolumen: $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$

Anteil in Prozent: $\frac{8r^3}{3\sqrt{3}} : \frac{4 \cdot \pi r^3}{3} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \pi} \approx 36.8\%$

3.1 **a** Volumen Fass: $V = \left(2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{5.75}{2}\right)^2 + 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{6.1}{2}\right)^2\right) \cdot \frac{7.88}{6} = 221.734\ldots$

Das Volumen des Fasses beträgt ungefähr 222 m^3.

b 222 000 l

3.2 **a** $V = \frac{\pi r^2 + 4\pi r^2 + \pi r^2}{6} \cdot h = \pi r^2 h$ Das Resultat ist exakt.

b $V = \frac{a^2 + 4a^2 + a^2}{6} \cdot a = a^3$ Das Resultat ist exakt.

c $V = \frac{ab + 4ab + ab}{6} \cdot c = abc$ Das Resultat ist exakt.

d $V = \frac{G + 4G + G}{6} \cdot h = G \cdot h$ Das Resultat ist exakt.

e Die Deckfläche ist null. Der Radius auf halber Höhe ist $\frac{r}{2}$, also

$V = \frac{\pi r^2 + 4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{6} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Das Resultat ist exakt.

f Grund- und Deckfläche sind null, also

$V = \frac{4\pi r^2}{6} \cdot 2r = \frac{4}{3}\pi r^3$ Das Resultat ist exakt.

3.3 **a** *Mögliche Antwort:*
Der Bruch ist das arithmetische Mittel der sechs Querschnitte.

Hinweis:
Der Querschnitt auf mittlerer Höhe wird vierfach gezählt. Weil die drei Querschnittsflächen unterschiedlich gewichtet werden, wird dieses arithmetische Mittel oft als «gewichtetes arithmetisches Mittel» bezeichnet.

b *Mögliche Antwort:*
Das Volumen eines Körpers berechnet sich als durchschnittliche Querschnittsfläche mal Höhe.

3.4 *Zum Tüfteln:*
Der Radius der Kreisfläche des Zylinders auf halber Höhe: $\frac{R+r}{2}$, also

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6}\left(\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right) \\ &= \frac{h}{6}\left(\pi R^2 + \pi(R+r)^2 + \pi r^2\right) \\ &= \frac{\pi h}{6}\left(R^2 + R^2 + 2Rr + r^2 + r^2\right) \\ &= \frac{\pi h}{6}\left(R^2 + Rr + r^2\right) \end{aligned}$$

Hinweis:
Die keplersche Fassregel liefert auch hier das exakte Resultat.

4 –

5.1

	Radius r	Durchmesser d	Oberflächeninhalt S
a	8 cm	16 cm	~804.2 cm²
b	4 m	8 m	~201.1 m²
c	1.4 dm	2.8 dm	~24.6 dm²
d	95 mm	190 mm	~113 411.5 mm²
e	~8.9 cm	~7.8 cm	1000 cm²
f	~1.4 m	~2.8 m	25 m²

5.2 **a** $S = 9 \cdot 4\pi \cdot 9^2 = 9160.884...,$ also $S \approx 9161\ m^2$

Es sind ungefähr 9161 m^2 zu putzen.

b Dies entspricht ungefähr 4580 Fenstern.

5.3 **a** Ähnlichkeitsfaktor zwischen
- den Radien: 4
- den Oberflächeninhalten: $4^2 = 16$
- den Volumen: $4^3 = 64$

b Oberflächeninhalt:
Kugel mit r = 1 m: S = 12.566... m^2
Kugel mit r = 4 m: S = 201.061... m^2

Überprüfen des Ähnlichkeitsfaktors:
201.061... : 12.566... = 16
Der Faktor ist richtig.

Volumen:
Kugel mit r = 1 m: V = 4.188... m^3
Kugel mit r = 4 m: V = 268.082... m^3

Überprüfen des Ähnlichkeitsfaktors:
268.082... : 4.188... = 64
Der Faktor ist richtig.

5.4 **a** $S = 300\,000\,000 \cdot 4\pi \cdot 0.0001^2 = 37.699\ldots$, also $S \approx 38\ m^2$

Die Oberfläche aller Lungenbläschen beträgt ungefähr 38 m^2.

b $r \approx \sqrt{\frac{38}{4\pi}} = 1.738\ldots$, also $r \approx 1.7$ m

Die Kugeln müssen einen Radius von ungefähr 1.7 m Radius haben.