1 –

2.1 **a**

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	3	5	7	9	11	13	15	…

+2 +2 +2 +2 +2 +2

Art des Wachstums: lineares Wachstum
Begründung: Es sind alles «+»-Operatoren und alle sind gleich.

b

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	9	16	25	36	$49 = 7^2$	$64 = 8^2$	9^2	…

+7 +9 +11 +13 +15 +17

Art des Wachstums: nicht lineares Wachstum
Begründung: Die Operatoren sind nicht alle gleich.

c

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	2.5	2.8	3.1	3.4	3.7	4.0	4.3	…

+0.3 +0.3 +0.3 +0.3 +0.3 +0.3

Art des Wachstums: lineares Wachstum
Begründung: Es sind alles «+»-Operatoren und alle sind gleich.

d

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	3	9	27	81	$243 = 3^5$	$729 = 3^6$	$2187 = 3^7$	…

$\cdot 3$ $\cdot 3$ $\cdot 3$ $\cdot 3$ $\cdot 3$ $\cdot 3$

Art des Wachstums: nicht lineares, exponentielles Wachstum
Begründung: Es sind alles «·»-Operatoren und alle sind gleich.

1b Lineare und nicht lineare Funktionen

e

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	…

+0.5 +0.5 +0.5 +0.5 +0.5 +0.5

Art des Wachstums: lineares Wachstum
Begründung: Es sind alles «+»-Operatoren und alle sind gleich.

f

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	67	62	57	52	47	42	37	…

– 5 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5

Art des Wachstums: lineares negatives Wachstum, linearer Zerfall
Begründung: Es sind alles «–»-Operatoren und alle sind gleich.

g

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	1680	840	420	210	105	52.5	26.25	…

: 2 : 2 : 2 : 2 : 2 : 2

Art des Wachstums: nicht lineares, exponentielles Wachstum, exponentieller Zerfall
Begründung: Es sind alles «:»-Operatoren und alle sind gleich.
Von einem x-Wert zum nächsten nimmt der y-Wert um den Faktor $\frac{1}{2}$ ab.

2.2 **a**

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	625	750	900	1080	1296	1555.2	1866.24	…

· 1.2 · 1.2 · 1.2 · 1.2 · 1.2 · 1.2

Art des Wachstums: nicht lineares, exponentielles Wachstum
Zuwachs als Prozentzahl: 20%

b

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	120	96	76.8	61.44	49.152	39.3216	31.45728	…

: 1,25 = $\frac{1}{1,25}$ · 0.8 · 0.8 · 0.8 · 0.8 · 0.8 · 0.8

Art des Wachstums: exponentielles, negatives Wachstum, exponentieller Zerfall

Wachstumsfaktor: 0.8 oder $\frac{80}{100}$

Zuwachs als Prozentzahl: -20%

c

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	200	210	220.5	231.5*	243.1*	255.3*	268.0*	…

· 1.05 · 1.05 · 1.05 · 1.05 · 1.05 · 1.05 *gerundet

Art des Wachstums: nicht lineares, exponentielles Wachstum
Wachstumsfaktor: 1.05

2.3 **a** *Anmerkung:*
Der unübliche Beginn der Nummerierung mit 0 statt mit 1 hat folgende Vorteile:
– Die Nummerierung verläuft wie bei den Papierfaltungen (siehe Themenbuchaufgabe 2).
– Der Exponent entspricht so jeweils genau der Nummer (siehe Aufgabe c).

Weizenkörner pro Feld:

Feld	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
Anzahl	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	…

· 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2

b Weizenkörner total:

Feld	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
Anzahl bis zu diesem Feld	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	…

Mögliche Beobachtung:
Die Summe der Anzahl Weizenkörner bis zum Feld mit der Nummer n ist um 1 kleiner als die Anzahl Weizenkörner auf dem Feld mit der Nummer (n + 1).

c Weizenkörner pro Feld:

Feld	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
Anzahl	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	…

Auf dem Feld mit der Nummer 63 hat es $2^{63} = 9.223\ldots \cdot 10^{18}$ Weizenkörner.

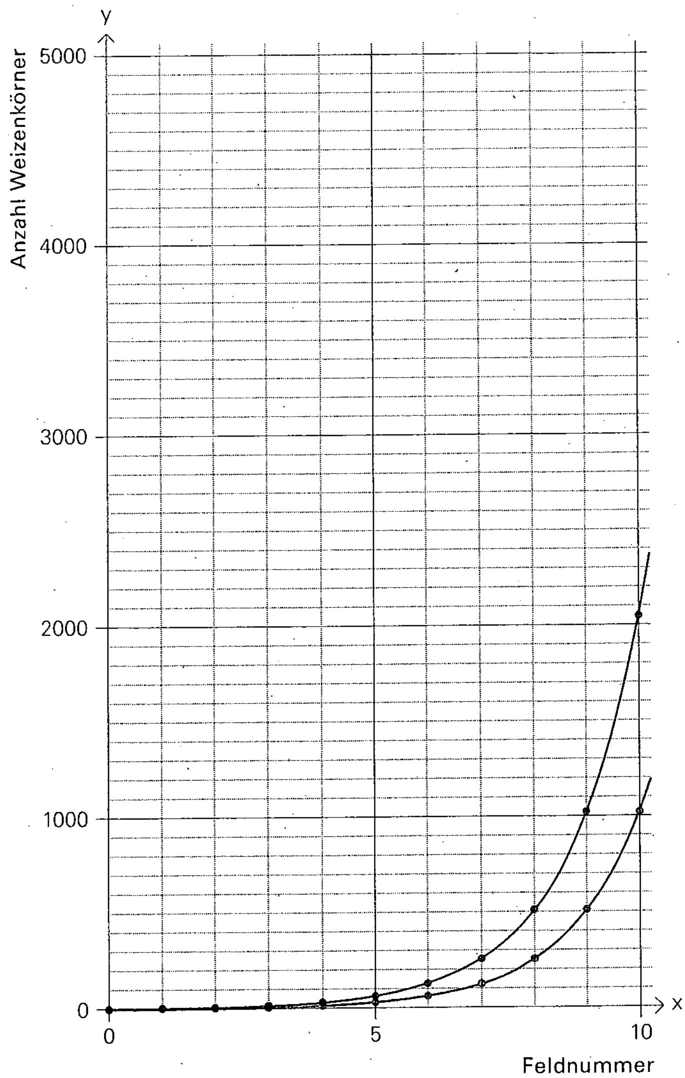
d – Weizenkörner total auf dem ganzen Schachbrett:
$2^{64} - 1 = 1.844\ldots \cdot 10^{19}$ (mehr als 18 Trillionen)

Hinweis:
Mit einer Zerlegung der Zahlen in Summanden, mit Teilrechnungen per Taschenrechner und mit schriftlichen Additionen von Hand erreicht man sogar die genaue Zahl:
18 446 744 073 709 551 616 – 1 = 18 446 744 073 709 551 615

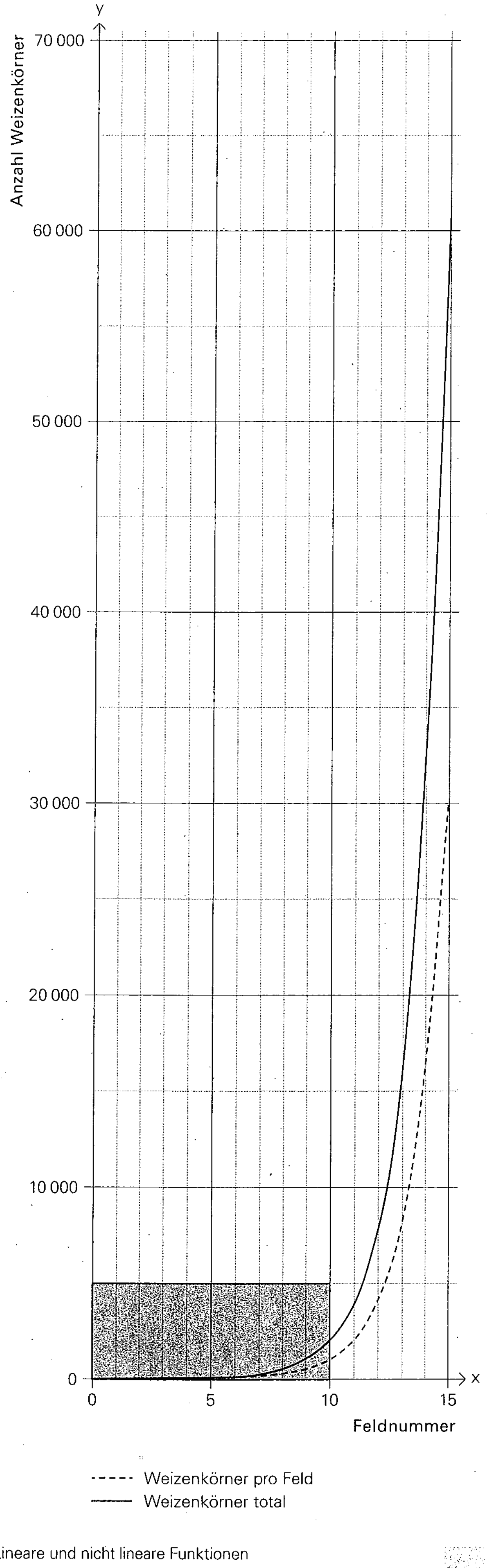
– Summe aller Zweierpotenzen bis 2^{100}: $2^{101} - 1$ (= $2.5353012004564\ldots \cdot 10^{30}$)

– Summe aller Zweierpotenzen bis 2^n: $2^{n+1} - 1$

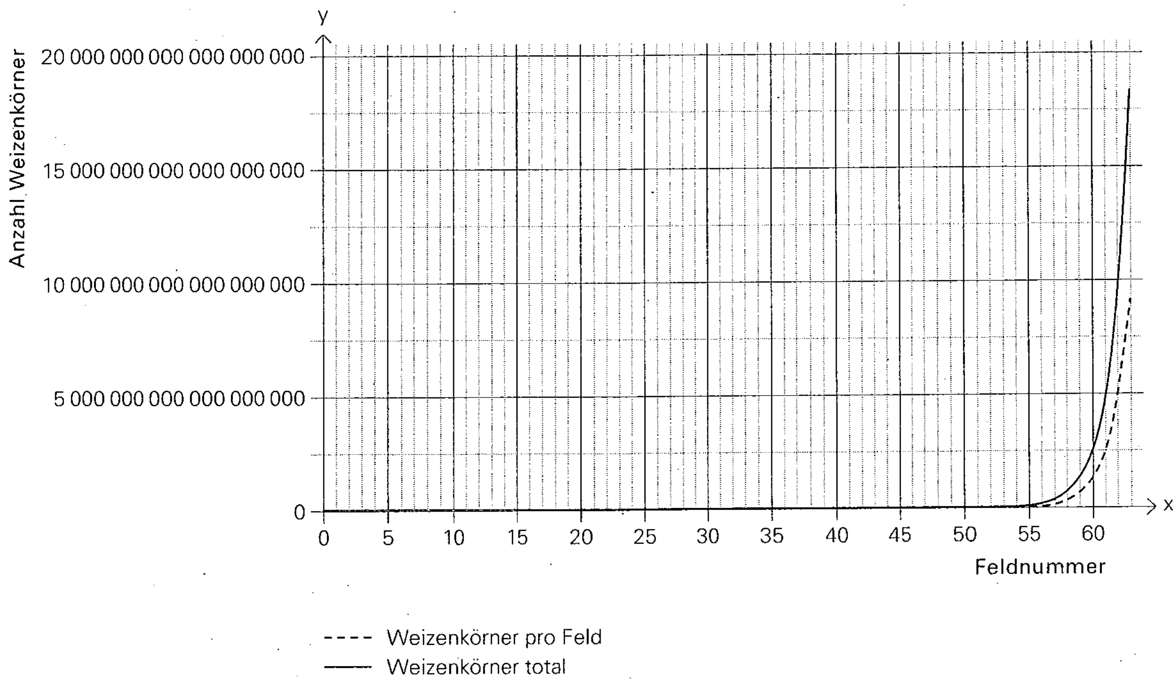
e *Hinweise:*
- Bei den Feldern 1 bis 3 lassen sich keine sinnvollen Punkte einzeichnen, das heisst, die Kurven entfernen sich kaum von der x-Achse.
- Die entsprechenden grünen und roten Punkte sind jeweils auf gleicher «Höhe», weil sich ihre y-Koordinaten nur um 1 unterscheiden.



f


y
Anzahl Weizenkörner
70 000
60 000
50 000
40 000
30 000
20 000
10 000
0
0
5
10
15
x
Feldnummer
Weizenkörner pro Feld
Weizenkörner total

g – zwanzig Trillionen
$20 \cdot 10^{18}$
– Das Diagramm für den Bereich bei Aufgabe f verschmilzt fast mit der Strichdicke der x-Achse:



– exponentielles Wachstum

– Wachstumsfaktor: 2
prozentuales Wachstum: 100%

– *Mögliche Begründung:*
Verfolgt man den Verlauf des Graphen, so hat man das Gefühl, dass lange nichts passiert, obwohl die y-Werte laufend verdoppelt werden. Dann steigt der Graph plötzlich steil explosionsartig an.

h Siehe Lösung unter «Extras»

Wachstumsfaktoren

2.4 **a** – achtzehn Trillionen
$1.8 \cdot 10^{19}$
– 4 g entsprechen 100 Körner.
1 kg entspricht 25 000 Körner.
1 t entspricht 25 Mio. Körner.

Auf dem Schachbrett liegen $1.844674... \cdot 10^{19}$ Körner. Gewicht: $7.378697... \cdot 10^{11}$ t
Anzahl Güterwagen: $1.109578... \cdot 10^{10}$ oder ungefähr 11 095.8 Mio. Wagen
Länge des Zuges: ungefähr 221 915 718 km

Umfang der Erde: ungefähr 40 000 km
Die Länge des Zugs würde ungefähr 5548-mal um die Erde reichen.

b *Möglicher Rechenweg:*
– Weltjahresproduktion: $672 \cdot 10^6$ t $= 6.72 \cdot 10^8$ t
Gesamtgewicht der Körner auf dem Schachbrett laut Aufgabe a: $7.378697... \cdot 10^{11}$ t

$$\frac{7.378697... \cdot 10^{11}}{6.72 \cdot 10^8} = \frac{7.378...}{6.72} \cdot 10^3 = 1.098.... \cdot 10^3$$

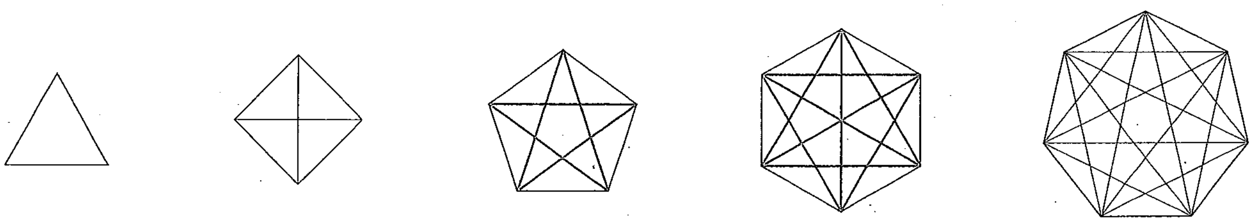
Nein, man müsste mehr als 1000 Weltjahresproduktionen auf dem Schachbrett anhäufen.

– Gesamtgewicht der Körner auf dem Schachbrett laut Aufgabe a: $7.378697... \cdot 10^{11}$ t
Weltbevölkerung: ungefähr 7 Milliarden $= 7 \cdot 10^9$

Anzahl t Weizen pro Mensch: $\frac{7.378697... \cdot 10^{11}}{7 \cdot 10^9} = \frac{7.378...}{7} \cdot 10^2 = 105.409...$

Jeder Mensch würde mehr als 100 t oder mehr als 100 000 kg Weizen erhalten.

2.5 **a** Diagonalen



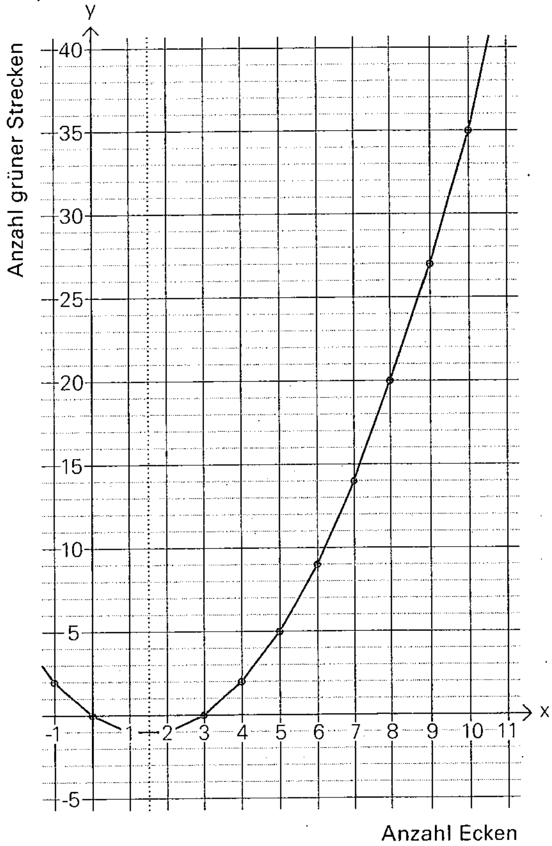
b

Anzahl Ecken	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Anzahl grüner Strecken	2	0	-1	-1	0	2	5	9	14	20	27	35	...

−2 −1 +0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8

c Siehe Graph im Koordinatensystem.

d *Mögliche Begründung:*
Es handelt sich um ein nicht lineares Wachstum, weil die «+»-Operatoren laufend grösser werden. Weil es sich nicht um «·»-Operatoren handelt, ist es kein exponentielles Wachstum.



e – Siehe Aufgabe b.
– Siehe Koordinatensystem.

– *Mögliche Antwort:*
Verkleinert man die x-Werte, so sinken die y-Werte nicht kontinuierlich, sondern steigen nach links wieder an. Der tiefste y-Wert in der Tabelle ist -1.
Die Kurve ist symmetrisch bezüglich einer Achse, die senkrecht zur x-Achse steht und zwischen x = 1 und x = 2 verläuft.

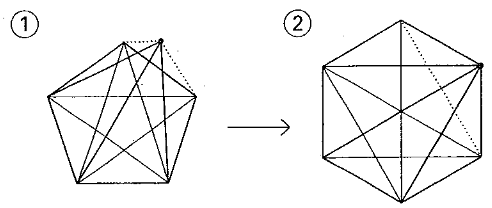
Anmerkung:
Es handelt sich um eine Parabel, also um den Graphen einer quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung $y = 0.5n^2 - 1.5n$

$$y = \frac{n(n-3)}{2}$$

Interpretation des Funktionsterms:
Von jeder der n Ecken aus kann eine Diagonale zu (n – 3) Ecken gezogen werden.
Alle Diagonalen werden so aber doppelt gezählt.

f *Zum Tüfteln:*
– *Mögliche Beschreibung:*
Den nächsten y-Wert (Anzahl Strecken) in der Tabelle erhält man, indem man zum vorangehenden y-Wert immer 1 mehr hinzuzählt.
Man zählt somit jeweils (x – 2) hinzu.

– *Mögliche Begründung:*
Geometrische Deutung an Hand des Schrittes vom Fünfeck zum Sechseck:
Von der neuen, 6. Ecke wird zu jeder der 5 Ecken des Fünfecks eine Strecke gezogen.
Zwei davon werden zu Seiten (punktiert, Abbildung ①), eine der 5-Eckseiten wird neu zu einer Diagonalen (punktiert, Abbildung ②). Die Zahl der Diagonalen erhöht sich also um 5 – 2 + 1 = 4.



Verallgemeinert: Beim x-Eck kommen (x – 1) – 2 + 1 = x – 2 Diagonalen hinzu.

2.6 **a** BMI von Person A: $\frac{56.7}{1.75^2} = 18.51\ldots \approx 18.5$

BMI von Person B: $\frac{81.0}{1.80^2} = 25.0$

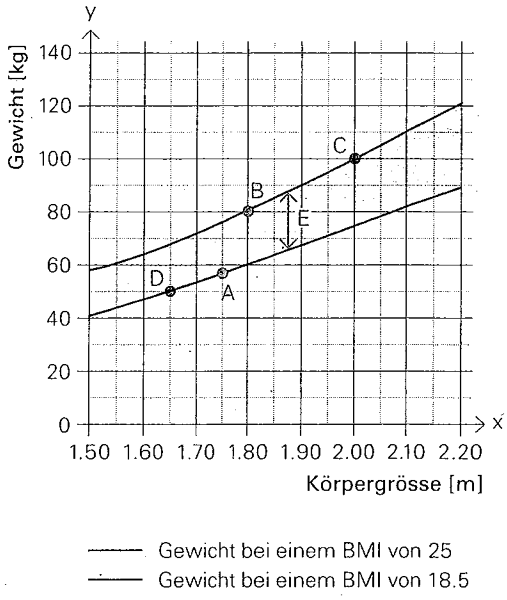
b Der Punkt für Person A liegt auf dem schwarzen, der Punkt für Person B auf dem grünen Graphen.

c BMI von C: $\frac{100.0}{2.00^2} = 25.0$

BMI von D: $\frac{50.0}{1.65^2} = 18.366\ldots \approx 18.4$

d Siehe Legende.

e Siehe rote Fläche im Koordinatensystem.



f Bei einer Grösse von 1.85 m liegt das Normalgewicht für einen BMI zwischen 18.5 und 25 ungefähr zwischen 65 kg und 85 kg.

g Die Beziehung ist nicht linear, denn die Graphen sind keine Geraden.

h – Gewicht von Person F:

$$\frac{x}{1.80^2} = 22.2$$

$$x = 22.2 \cdot 1.80^2$$

$$x = 71.928$$

Person F wiegt ungefähr 72 kg.

– Grösse von Person G:

$$\frac{62}{y^2} = 20.3$$

$$62 = 20.3 \cdot y^2$$

$$\frac{62}{20.3} = y^2$$

$$\sqrt{\frac{62}{20.3}} = y$$

$$1.747\ldots = y$$

Person G ist ungefähr 1.75 m gross.

i $g = \text{BMI} \cdot k^2$

$$k = \sqrt{\frac{g}{\text{BMI}}}$$

2.7 **a** Fläche A4-Papier: $29.7 \cdot 21 \text{ cm}^2 = 623.7 \text{ cm}^2$

Format	A8	A7	A6	A5	A4	A3	A2	A1	A0
Flächeninhalt [cm^2]	~39.0	~78.0	~155.9	~311.9	623.7	1247.4	2494.8	4989.6	9979.2

$\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$

b Die Flächeninhalte werden verdoppelt beziehungsweise halbiert.

c Es handelt sich um ein exponentielles Wachstum.
Es wird immer mit 2 multipliziert, der Wachstumsfaktor ist 2.

Mögliche Begründung:
Es wird immer mit 2 multipliziert. Daher handelt es sich um nicht lineares, exponentielles Wachstum.

d Graph c

Mögliche Begründung:
Auf diesem Graphen liegen die in der Tabelle aufgeführten Werte.

e *Mögliche Vermutung:*
Walter Porstmann hat dem A0-Format einen Flächeninhalt von $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$ zugeordnet.
Er hat wahrscheinlich A0 als Ausgangsformat für seine Formatreihe gewählt.

f – *Mögliche Feststellungen:*
Die Unterschiede bei den Flächeninhalten sind so klein, dass sie in dieser Grafik nicht sichtbar gemacht werden können.
Die Unterschiede liegen zwischen 0 (bei A4, A3, A2) und ungefähr 20 cm^2 (bei A0).

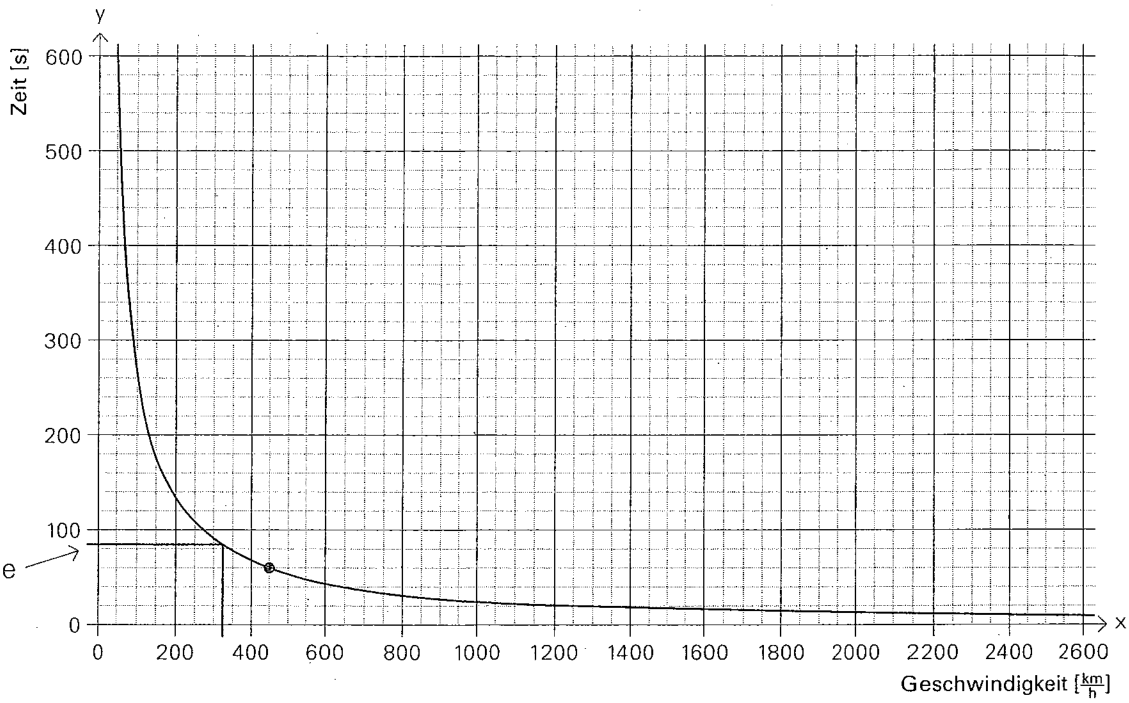
– *Mögliche Gründe:*
- beschränkte Messgenauigkeit
- Berechnungen mit gerundeten Werten

2.8 **a** Punkt (450/60) bedeutet:
Legt man die Strecke e mit einer Geschwindigkeit von 450 $\frac{km}{h}$ zurück, so benötigt man dafür 60 s.

Länge der Strecke e: $450\ \frac{km}{h} \cdot 60\ s\ =\ \frac{450 \cdot 60}{60 \cdot 60}\ km\ =\ 7.5\ km$

b – Berechnung der Flugzeit:
$7.5\ km : 320\ \frac{km}{h}\ =\ 0.0234375\ h\ \approx\ 84\ s$

– Kontrolle



c

Geschwindigkeits-rekord	Datum	Fahrzeug	Zeit
269 $\frac{km}{h}$	3.10.1995	Fahrrad hinter einem Fahrzeug mit Windschutz	~100 s*
515 $\frac{km}{h}$	18.5.1990	Hochgeschwindigkeitszug TGV	~52 s*
1228 $\frac{km}{h}$	15.10.1997	Auto mit Strahlgetriebe	~20 s*
10 392 $\frac{km}{h}$	16.11 2002	Unbemanntes Düsenflugzeug	~2.6 s
39 897 $\frac{km}{h}$	26.5.1969	Apollo-10-Mission (Mondflug)	~0.7 s

* in der Grafik abgelesen

d ☒ umgekehrte Proportionalität

☒ nicht lineares Wachstum

3.1 **a** nicht lineares Wachstum, möglicherweise exponentielles Wachstum

b

Jahr	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Anzahl Fahrzeuge in 1000	7	20	125	102	252	~850	~1650	~2700	~3750	~4600	~5400

·1.9 ·1.6 ·1.4 ·1.2 ·1.2

c Man spricht von exponentiellem Wachstum.

d – In diesem Bereich könnte man auch von linearem Wachstum sprechen.
– Steigung der blauen Geraden: (5 400 000 – 850 000) : 50 = 91 000
– Bedeutung: Der Bestand hat um ungefähr 91 000 Fahrzeuge pro Jahr zugenommen.

3.2 **a** *Mögliche Beschreibung:*
Man hat beim Graphen den Eindruck einer Geraden. Deshalb könnte man vermuten, dass ein lineares Wachstum vorliegt.

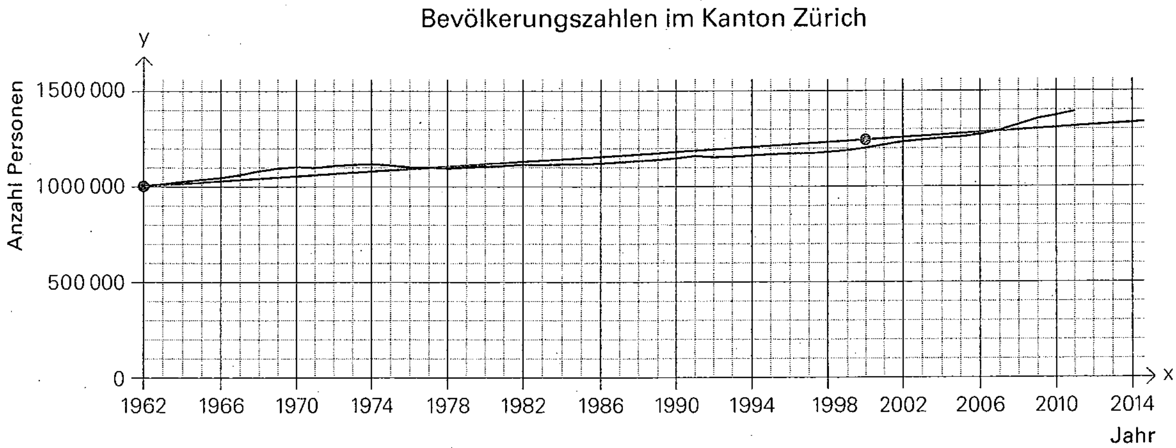
b

Jahr	1985	1986	1987	1988	1989
Anzahl Personen in 1000	1123	1128	1133	1140	1146

+ 5 + 5 + 7 + 6

Mögliche Beurteilung:
Im betrachteten Zeitabschnitt 1985 bis 1989 wächst der Kanton Zürich jeweils von Jahr zu Jahr um 5000, 6000 oder 7000 Personen. Verglichen mit der gesamten Bevölkerungszahl von über 1 Mio. darf man sagen, dass die jährliche Zunahme in diesem Zeitraum ungefähr gleich blieb. Man könnte deshalb von linearem Wachstum sprechen.

c

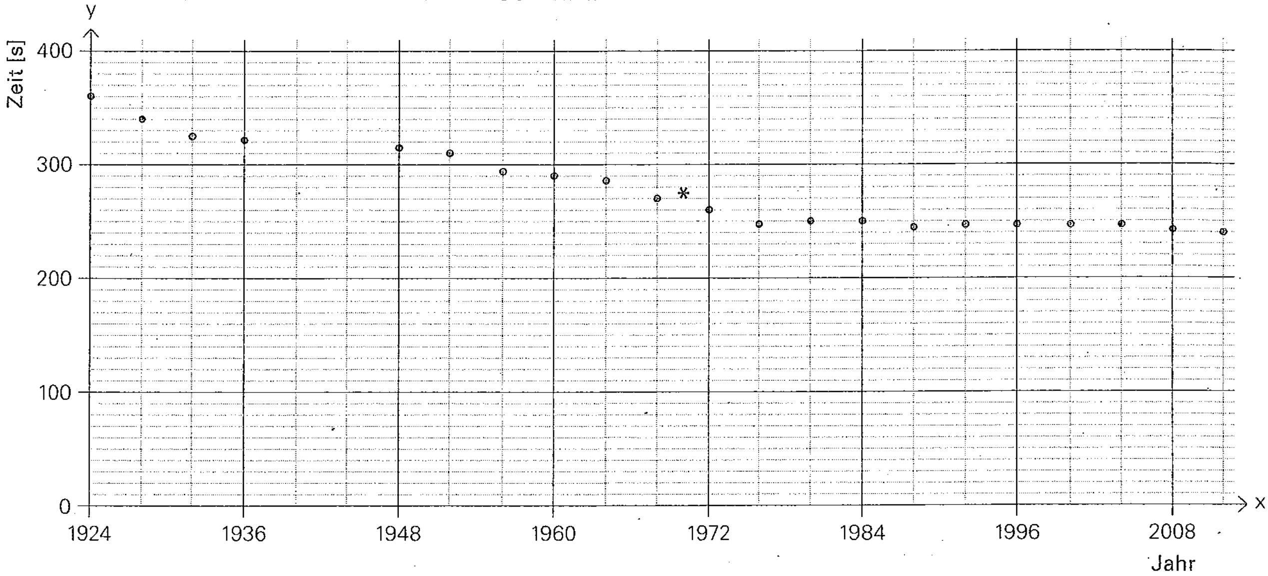


«Es könnte sein, dass im Jahr 2014 im Kanton Zürich ungefähr 1.35 Mio. Personen leben.»

d –

4.1 **a**

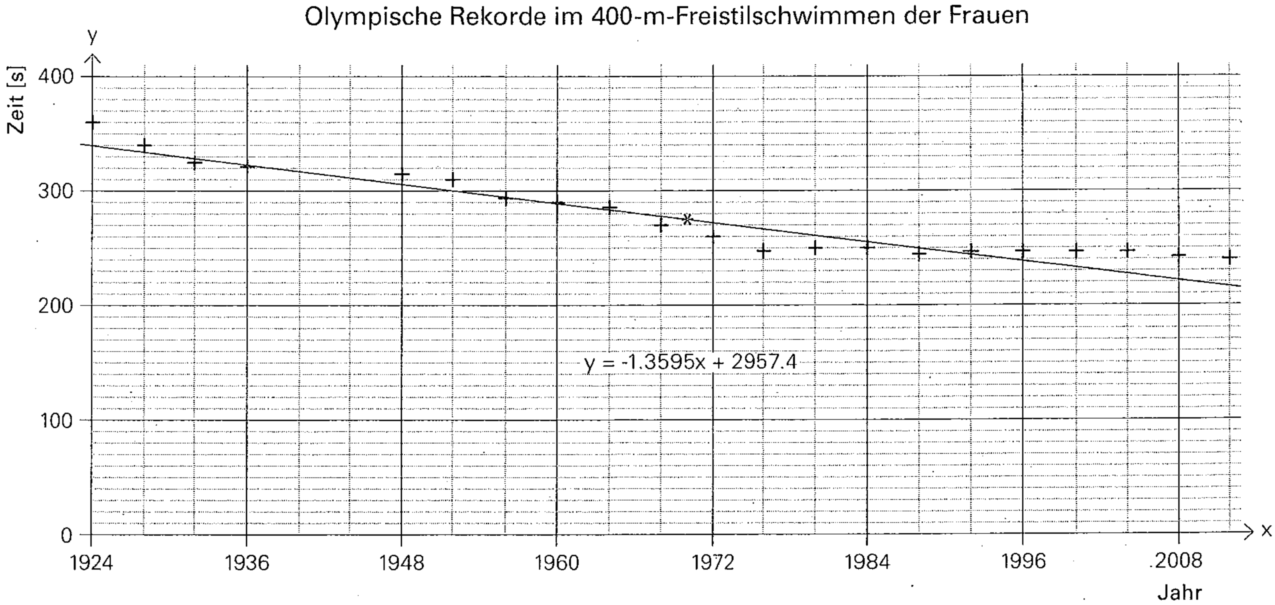
Freistil-Schwimmen der Frauen über 400 m



b Arithmetisches Mittel der x-Werte: 41 380 : 21 = 1970.476…
Arithmetisches Mittel der y-Werte: 5848.98 : 21 = 278.52285…
Die Trendgerade muss durch den «Mittelpunkt» * gehen.

Hinweis:
Die Grafik unten wurde vom Computer gerechnet und gezeichnet.

Olympische Rekorde im 400-m-Freistilschwimmen der Frauen



c *Mögliche Beschreibung:*
Die Trendgerade senkt sich nach rechts, das heisst, die Zeiten werden immer kürzer dank besserer Technik, besserem Training usw.

Hinweis:
Wegen des 2. Weltkriegs fanden in den Jahren 1940 und 1944 keine Olympiaden statt.

4.2 **a** –

b Siehe Lösung unter «Extras»

Schuhgrösse

c –